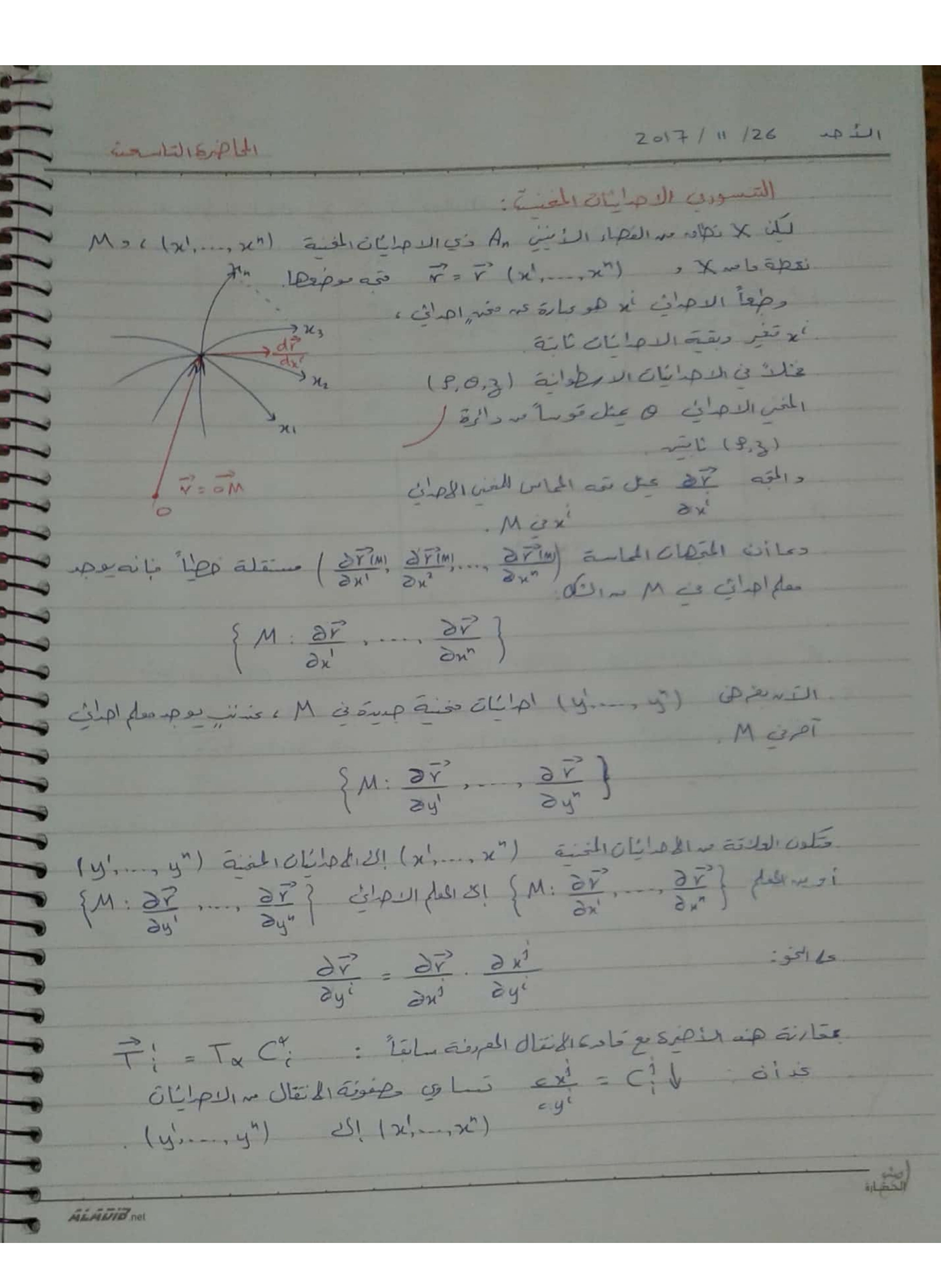


التنسور في الإحداثيات المنحنية:

لتكن X نقطة من الفضاء الأفيني A_n ذي الإحداثيات المنحنية $(x^1,\dots,x^n)$ ، M

نقطة ما من X ، $\vec{r} = \vec{r}\,(x^1,\dots,x^n)$ متجه موضعها .

وطبقاً الإحداثي x^i هو عبارة عن منحنٍ إحداثي ، x^i تتغير وبقية الإحداثيات ثابتة .

مثلاً في الإحداثيات الاسطوانية (ρ,θ,z) المنحني الإحداثي θ يمثل قوساً من دائرة (ρ,z) ثابتة

والمتجه $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}$ يمثل متجه المماس للمنحني الإحداثي x^i في M .

وبما أن المتجهات المماسة $\left(\frac{\partial \vec{r}(M)}{\partial x^1}, \frac{\partial \vec{r}(M)}{\partial x^2},\dots,\frac{\partial \vec{r}(M)}{\partial x^n}\right)$ مستقلة خطياً فإنه يوجد معلم إحداثي في M من الشكل :

$$\left\{M : \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^n}\right\}$$

لنفترض $(y^1,\dots,y^n)$ إحداثيات منحنية جديدة في M ، عندئذٍ يوجد معلم إحداثي آخر في M .

$$\left\{M : \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^1},\dots,\frac{\partial \vec{r}}{\partial y^n}\right\}$$

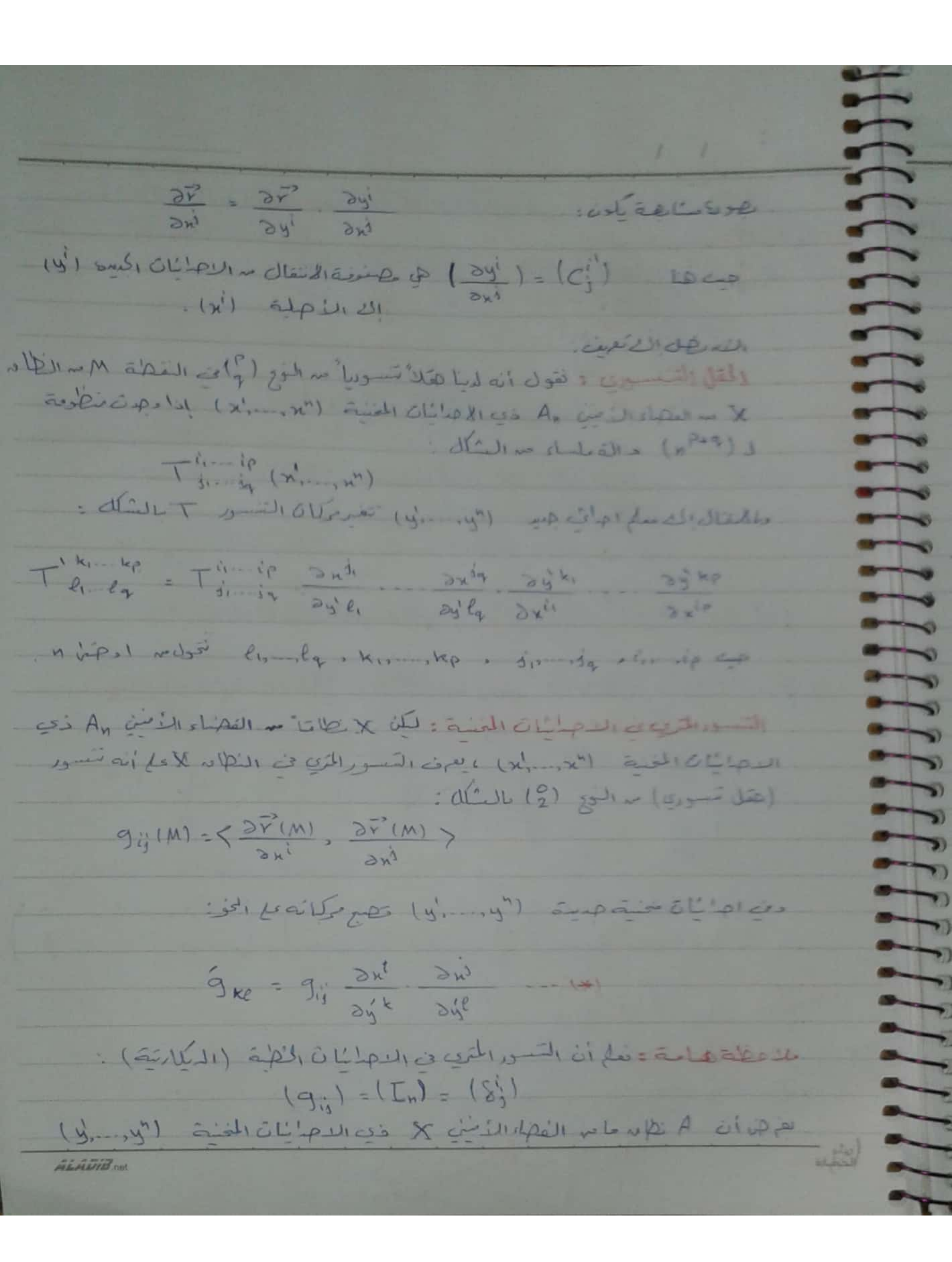
تكون العلاقة من الإحداثيات المنحنية $(x^1,\dots,x^n)$ إلى الإحداثيات المنحنية $(y^1,\dots,y^n)$ أو من المعلم $\left\{M : \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^n}\right\}$ إلى المعلم الإحداثي $\left\{M : \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^1},\dots,\frac{\partial \vec{r}}{\partial y^n}\right\}$

على النحو:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial y^i}$$

بمقارنة هذه النظرية مع قاعدة الانتقال المعروفة سابقاً : $\vec{T}_i = T_\alpha C^\alpha_i$

إذاً $\frac{\partial x^j}{\partial y^i} = C^j_i$ تساوي مصفوفة الانتقال من الإحداثيات $(x^1,\dots,x^n)$ إلى $(y^1,\dots,y^n)$.



وبصورة مشابهة يكون:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

حيث هنا $(C^i_j) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ هي مصفوفة الانتقال من الإحداثيات الجديدة (y^i) إلى الأصلية (x^i).

والآن نصل إلى التعريف.

الحقل التنسوري: نقول أنه لدينا حقلاً تنسورياً من النوع $\binom{p}{q}$ في النقطة M من النطاق X من الفضاء الأفيني A_n ذي الإحداثيات المنحنية $(x^1,\dots,x^n)$ إذا وجدت منظومة لـ (n^{p+q}) من المركبات من الشكل:

$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^1,\dots,x^n)$$

وبالانتقال إلى معلم إحداثي جديد $(y^1,\dots,y^n)$ تتغير مركبات التنسور T بالشكل:

$$T'^{k_1\dots k_p}_{l_1\dots l_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}} \cdot \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}}$$

حيث $i_1,\dots,i_p$ ، $j_1,\dots,j_q$ ، $k_1,\dots,k_p$ ، $l_1,\dots,l_q$ تتحول من 1 إلى n.

التنسور المتري في الإحداثيات المنحنية: ليكن X نطاقاً من الفضاء الأفيني A_n ذي الإحداثيات المنحنية $(x^1,\dots,x^n)$ ، يعرف التنسور المتري في النطاق X على أنه تنسور (حقل تنسوري) من النوع $\binom{0}{2}$ بالشكل:

$$g_{ij}(M) = \left\langle \frac{\partial \vec{r}(M)}{\partial x^i}, \frac{\partial \vec{r}(M)}{\partial x^j} \right\rangle$$

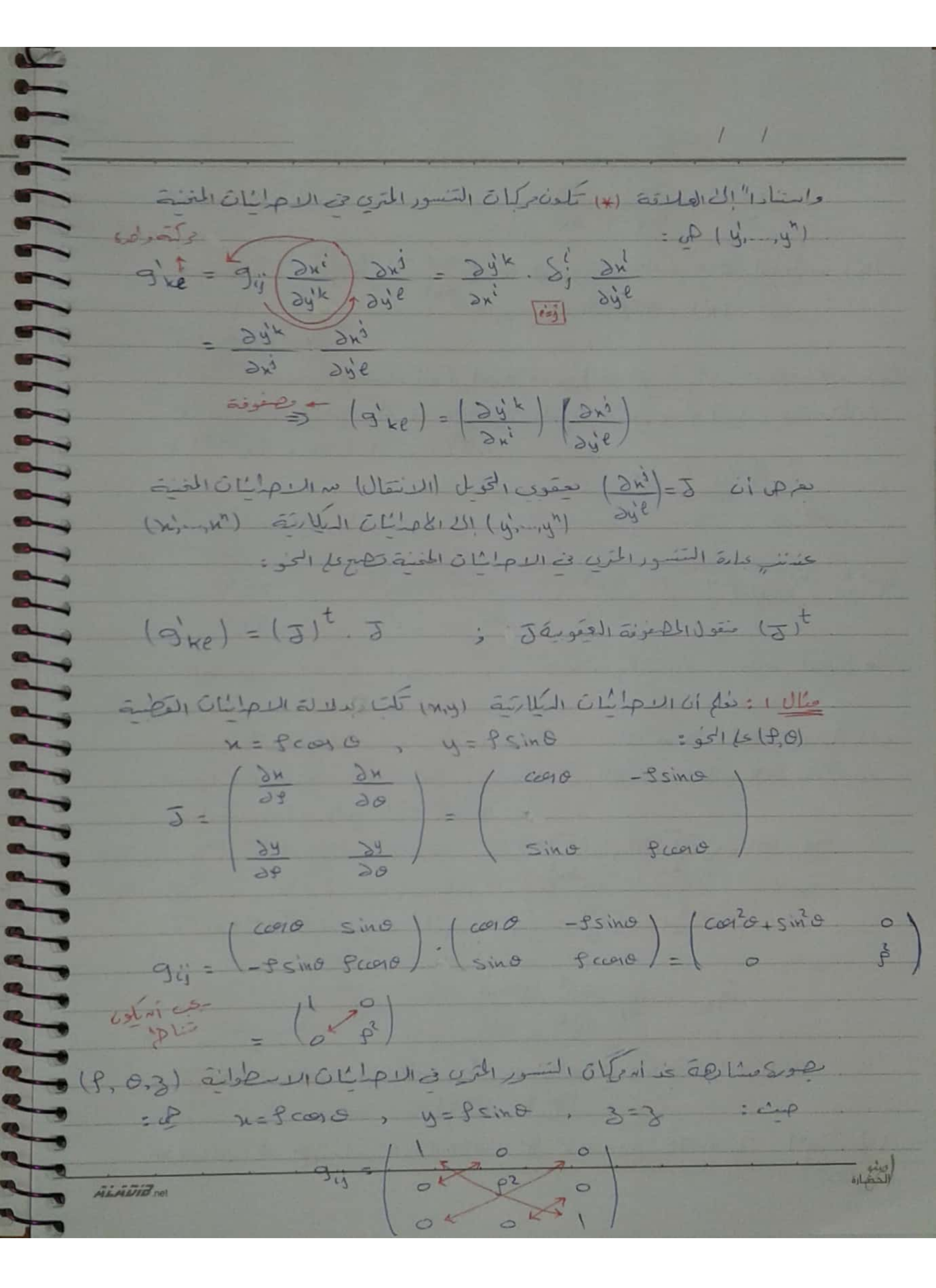
وفي إحداثيات منحنية جديدة $(y^1,\dots,y^n)$ تصبح مركباته على النحو:

$$g'_{kl} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^l} \quad \dots (*)$$

ملاحظة هامة: نعلم أن التنسور المتري في الإحداثيات الخطية (الديكارتية):

$$(g_{ij}) = (I_n) = (\delta^i_j)$$

نفرض أن A نطاق ما من الفضاء الأفيني X ذي الإحداثيات المنحنية $(y^1,\dots,y^n)$



واستناداً إلى العلاقة (*) تكون مركبات التنسور المتري في الاحداثيات المنحنية $(y^1,\dots,y^n)$ هي :

مركبة واحدة

$$g'_{kl} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\cdot\delta^i_j\,\frac{\partial x^i}{\partial y^l}$$

$i=j$

$$= \frac{\partial y^k}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^j}{\partial y^l}$$

مصفوفة ←

$$\Rightarrow (g'_{kl}) = \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial y^l}\right)$$

نفرض أن $J = \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^l}\right)$ يعقوبي التحويل (الانتقال) من الاحداثيات المنحنية $(x^1,\dots,x^n)$ إلى الاحداثيات الديكارتية $(y^1,\dots,y^n)$

عندئذٍ عبارة التنسور المتري في الاحداثيات المنحنية تصبح على النحو :

$$(g'_{kl}) = (J)^t\,.\,J \quad ; \quad (J)^t \text{ منقول المصفوفة اليعقوبية } J$$

مثال 1 : نعلم أن الاحداثيات الديكارتية (x,y) تكتب بدلالة الاحداثيات القطبية (ρ,θ) على النحو :

$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\theta$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

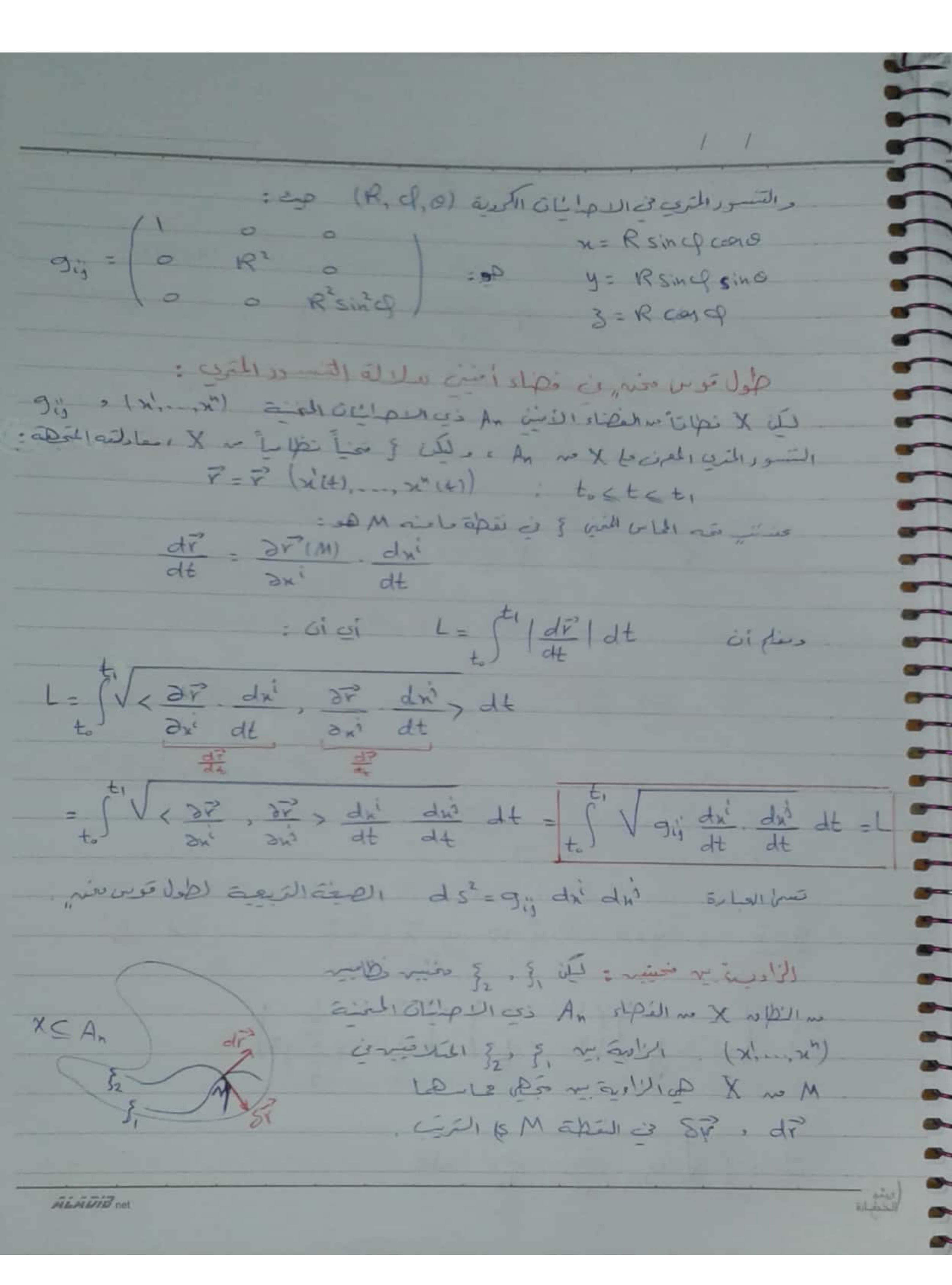
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

يجب أن يكون تناظر

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

بصورة مشابهة نجد أن مركبات التنسور المتري في الاحداثيات الاسطوانية (ρ,θ,z) هي :
حيث : $x=\rho\cos\theta \; , \; y=\rho\sin\theta \; , \; z=z$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



/ /

والتنسور المتري في الإحداثيات الكروية (R, φ, θ) حيث:

$x = R\sin\varphi\cos\theta$

$y = R\sin\varphi\sin\theta$

$z = R\cos\varphi$

هو:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

طول قوس منحنٍ في فضاء أفيني بدلالة التنسور المتري:

ليكن X نظاماً من الفضاء الأفيني A_n ذي الإحداثيات المنحنية $(x^1, \dots, x^n)$، g_{ij} التنسور المتري المعرف على X من A_n، ولكن ξ منحنياً نظامياً من X، معادلته المتجهة:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(x^1(t), \dots, x^n(t)) \quad : \quad t_0 \le t \le t_1$$

عندئذٍ متجه المماس المنحني ξ في نقطة ما منه M هو:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}(M)}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i}{dt}$$

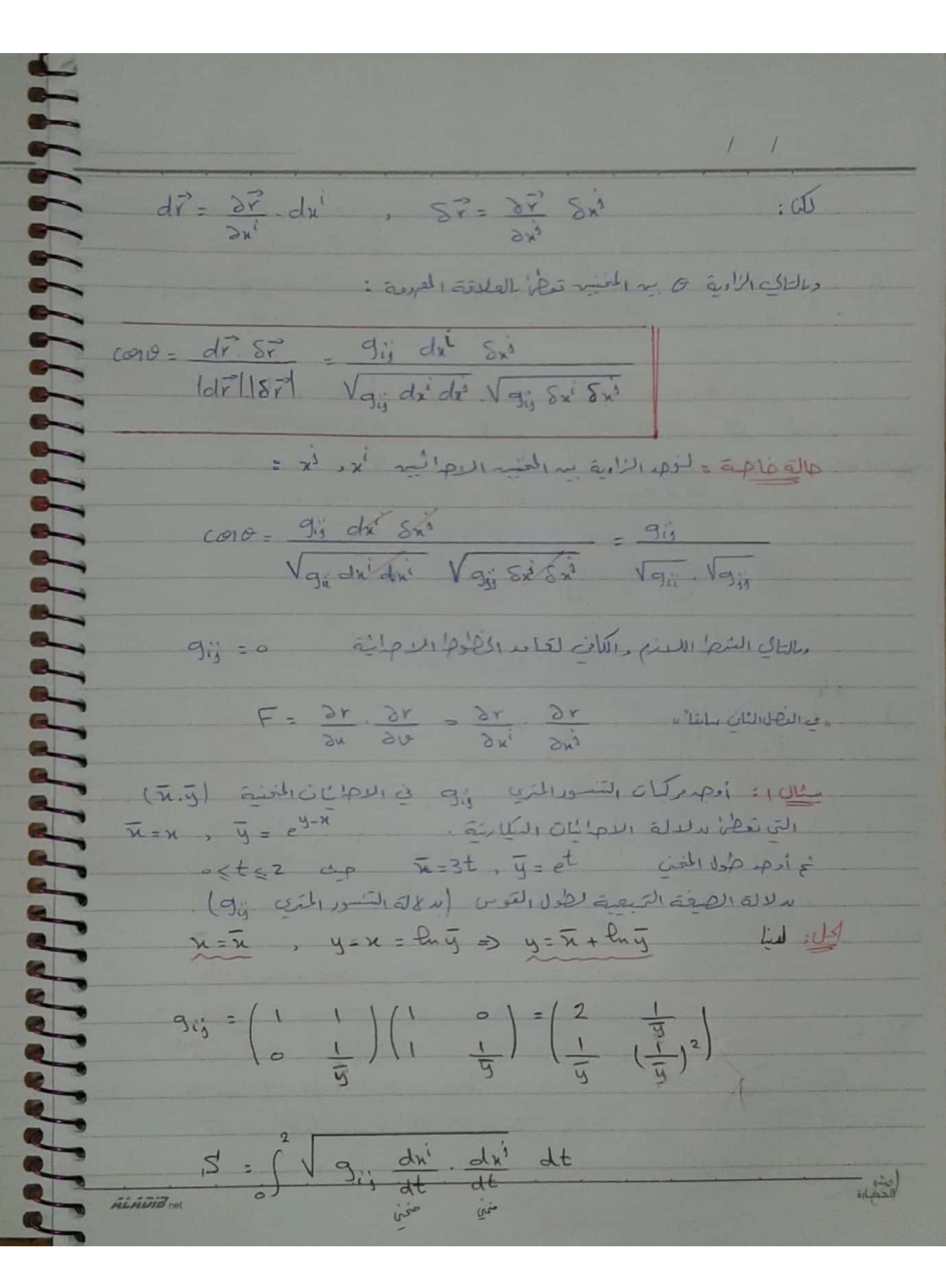
ونعلم أن $L = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$ أي أن:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\Big\langle \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i}{dt}}_{\frac{d\vec{r}}{dt}} , \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j} \cdot \frac{dx^j}{dt}}_{\frac{d\vec{r}}{dt}} \Big\rangle}\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\Big\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} , \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j} \Big\rangle \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt = \boxed{\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^j}{dt}}\, dt = L}$$

تسمى العبارة $ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ الصيغة التربيعية لطول قوس منحنٍ.

الزاوية بين منحنيين: ليكن ξ_1، ξ_2 منحنيين نظاميين من النظام X من الفضاء A_n ذي الإحداثيات المنحنية $(x^1, \dots, x^n)$. الزاوية بين ξ_1 و ξ_2 المتلاقيين في M من X هي الزاوية بين متجهي مماسيهما $d\vec{r}$، $\delta\vec{r}$ في النقطة M على الترتيب.



لكن :

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\, dx^i \quad , \quad \delta\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j}\, \delta x^j$$

وبالتالي الزاوية θ بين المنحنيين تعطى بالعلاقة المعروفة :

$$\cos\theta = \frac{d\vec{r} \cdot \delta\vec{r}}{|d\vec{r}|\,|\delta\vec{r}|} = \frac{g_{ij}\, dx^i\, \delta x^j}{\sqrt{g_{ij}\, dx^i dx^j}\cdot\sqrt{g_{ij}\, \delta x^i\, \delta x^j}}$$

حالة خاصة : لنوجد الزاوية بين المنحنيين الإحداثيين x^i , x^j :

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}\, dx^i\, \delta x^j}{\sqrt{g_{ii}\, dx^i dx^i}\ \sqrt{g_{jj}\, \delta x^j \delta x^j}} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}}\cdot\sqrt{g_{jj}}}$$

وبالتالي الشرط اللازم والكافي لتعامد الخطوط الإحداثية $g_{ij} = 0$

«في الفصل الثاني سابقاً» $F = \frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial r}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^j}$

مثال ١ : أوجد مركبات التنسور المتري g_{ij} في الإحداثيات المنحنية $(\bar{x}.\bar{y})$ التي تعطى بدلالة الإحداثيات الديكارتية $\bar{x} = x \ , \ \bar{y} = e^{y-x}$

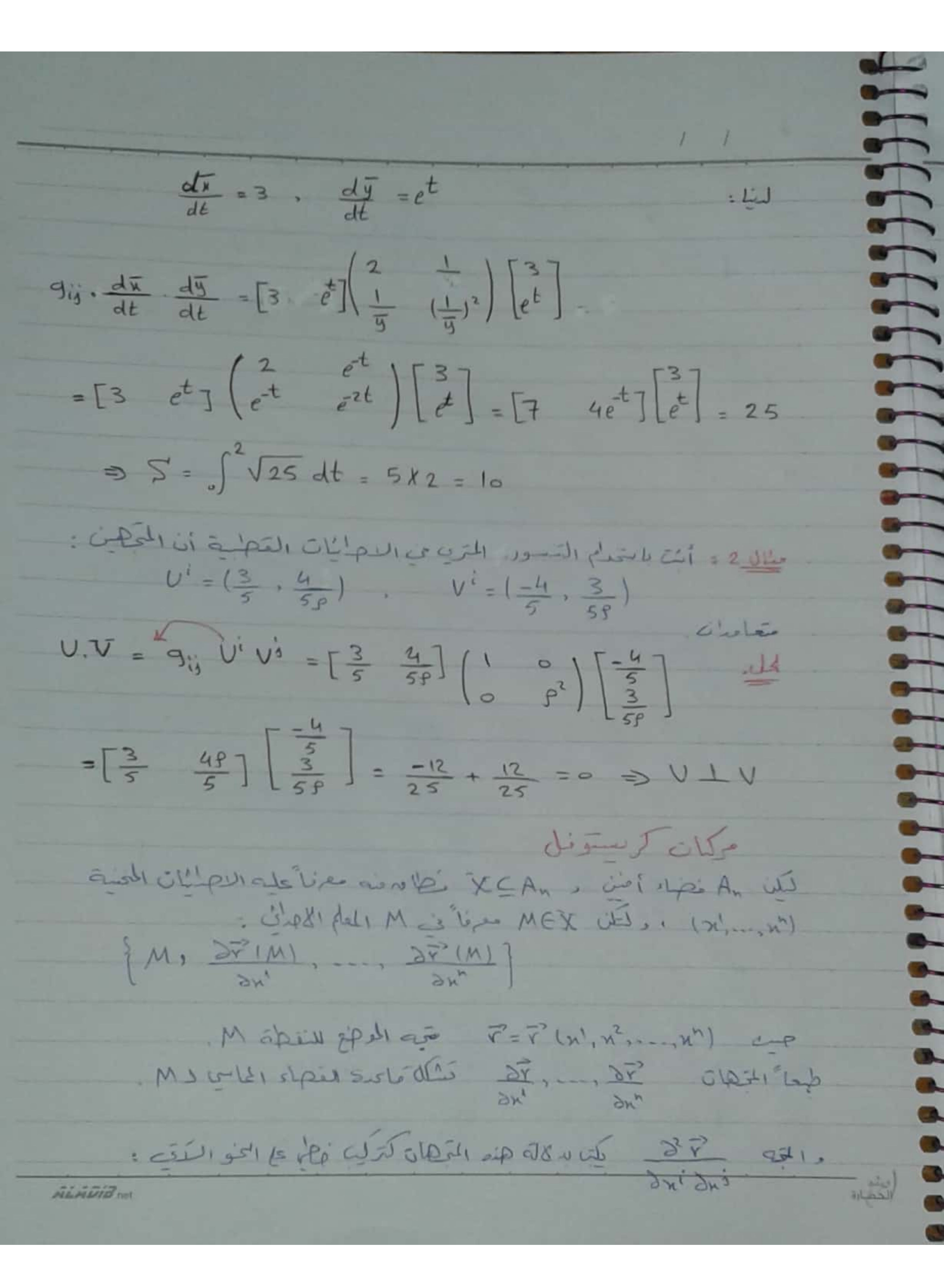
ثم أوجد طول المنحني $\bar{x} = 3t \ , \ \bar{y} = e^{t}$ حيث $0 \leq t \leq 2$

بدلالة الصيغة التبعية لطول القوس (بدلالة التنسور المتري g_{ij})

الحل : لدينا $x = \bar{x} \quad , \quad y - x = \ln\bar{y} \Rightarrow y = \bar{x} + \ln\bar{y}$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\bar{y}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{\bar{y}} \\ \frac{1}{\bar{y}} & (\frac{1}{\bar{y}})^2 \end{pmatrix}$$

$$S = \int_0^2 \sqrt{g_{ij}\, \frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dx^j}{dt}}\ dt$$



لدينا: $\frac{d\bar{x}}{dt} = 3 \quad , \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = e^t$

$$g_{ij} \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} \cdot \frac{d\bar{y}}{dt} = [3 \quad e^t] \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} & (\frac{1}{y})^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$= [3 \quad e^t] \begin{pmatrix} 2 & e^{-t} \\ e^{-t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ e^t \end{bmatrix} = [7 \quad 4e^{-t}] \begin{bmatrix} 3 \\ e^t \end{bmatrix} = 25$$

$$\Rightarrow S = \int_0^2 \sqrt{25}\, dt = 5 \times 2 = 10$$

مثال 2 : أثبت باستخدام التنسور المتري في الاحداثيات القطبية أن المتجهين :

$$U^i = \left(\frac{3}{5} , \frac{4}{5\rho}\right) \quad , \quad V^i = \left(\frac{-4}{5} , \frac{3}{5\rho}\right)$$

متعامدان

الحل

$$U.V = g_{ij}\, U^i V^j = \left[\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5\rho}\right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3}{5\rho} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{3}{5} \quad \frac{4\rho}{5}\right] \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3}{5\rho} \end{bmatrix} = \frac{-12}{25} + \frac{12}{25} = 0 \Rightarrow V \perp V$$

مركبات كريستوفل

لكن A_n فضاء أفيني ، $X \subseteq A_n$ فضاء منه معرفاً عليه الاحداثيات المحنية $(x^1, \dots, x^n)$ ، ولكن $M \in X$ معرفاً في M المعلم الاحداثي :

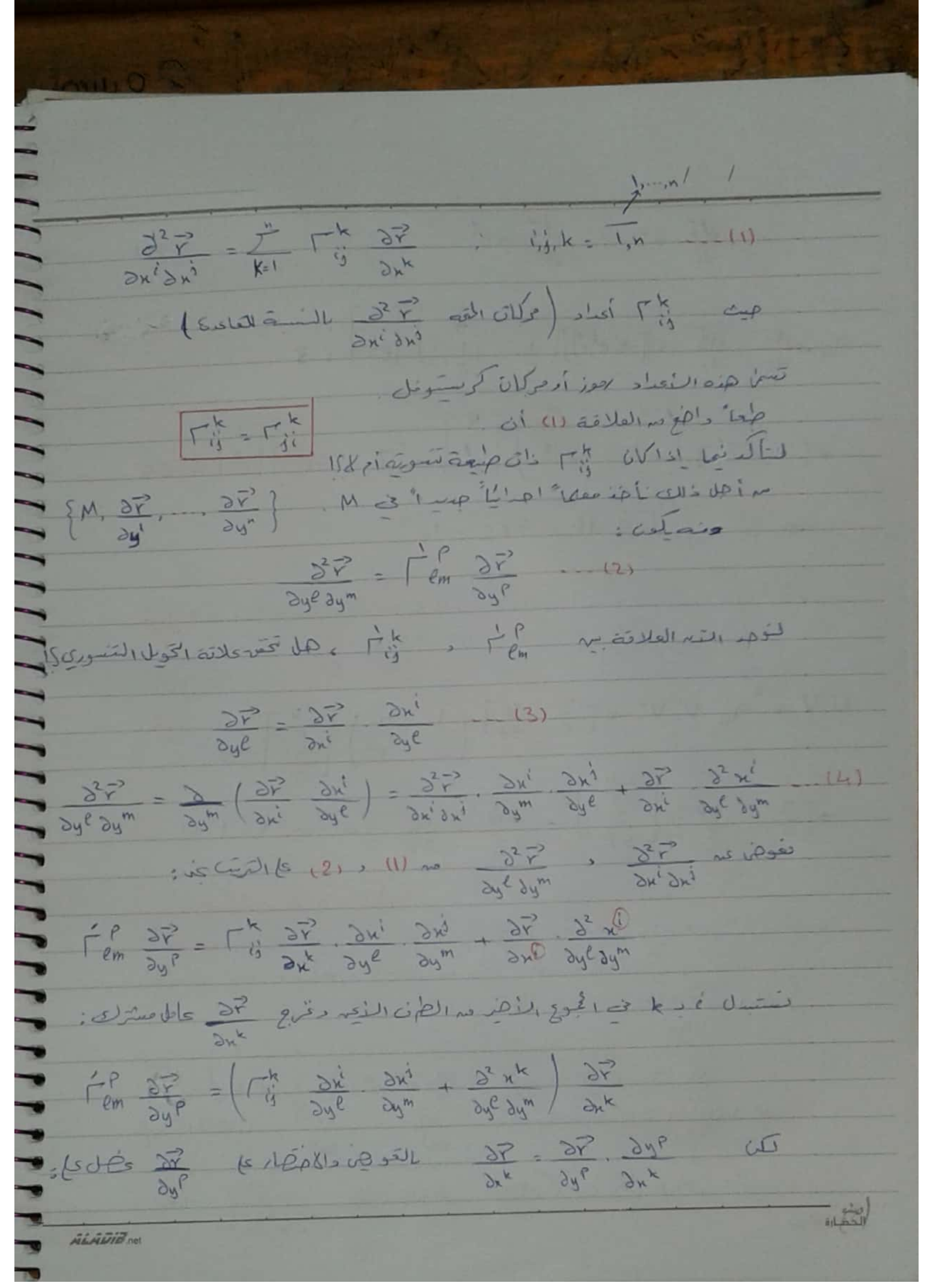
$$\left\{ M , \frac{\partial \vec{r}(M)}{\partial x^1} , \dots , \frac{\partial \vec{r}(M)}{\partial x^n} \right\}$$

حيث $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ متجه الموضع للنقطة M.

طبعاً المتجهات $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^n}$ تشكل قاعدة الفضاء المماسي لـ M.

، المتجه $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^i \partial x^j}$ يكتب بدلالة هذه المتجهات كتركيب خطي على النحو التالي :

ALMOID.net



$1,\dots,n$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^i \partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} \quad ; \quad i,j,k = \overline{1,n} \quad ---(1)$$

حيث Γ^k_{ij} أعداد (مركبات المتجه $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^i \partial x^j}$ بالنسبة للقاعدة).

تسمى هذه الأعداد رموز أو مركبات كريستوفل.

طبعاً واضح من العلاقة (1) أن:

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}}$$

لنتأكد فيما إذا كان Γ^k_{ij} ذات صفة تنسورية أم لا؟!

من أجل ذلك نأخذ معلماً إحداثياً جديداً في M $\left\{M, \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^n}\right\}$ ومنه يكون:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^l \partial y^m} = \Gamma'^p_{lm} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^p} \quad ---(2)$$

لنوجد الآن العلاقة بين Γ'^p_{lm} و Γ^k_{ij}، هل تحقق علاقة التحويل التنسوري؟!

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y^l} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \quad ---(3)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^l \partial y^m} = \frac{\partial}{\partial y^m}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^l}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^i \partial x^j} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^m} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^l} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^l \partial y^m} \quad ---(4)$$

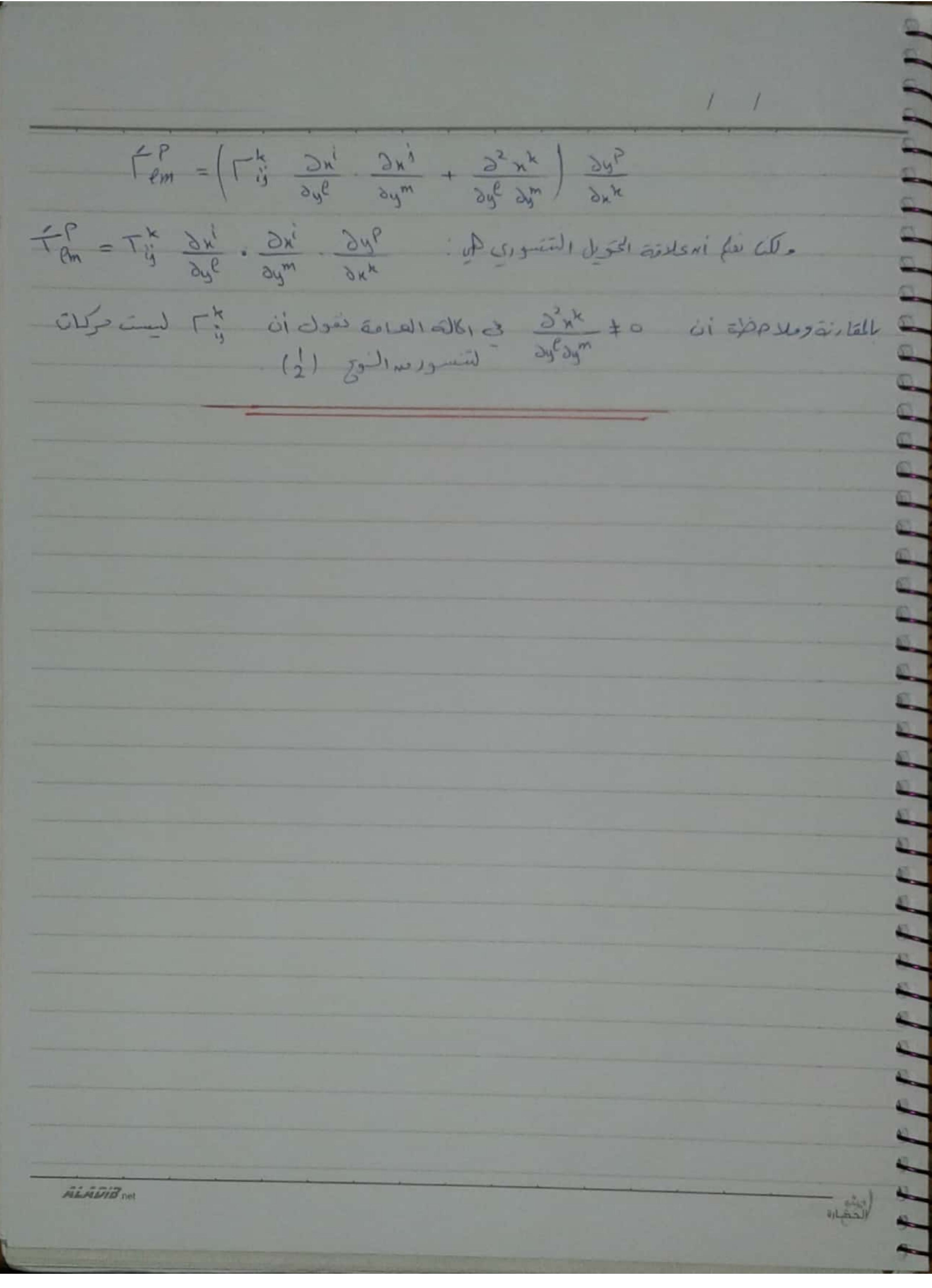
نعوض عن $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^i \partial x^j}$ و $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^l \partial y^m}$ من (1) و (2) على الترتيب نجد:

$$\Gamma'^p_{lm} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^p} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^m} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^l \partial y^m}$$

نستبدل i بـ k في المجموع الأخير من الطرف الأيمن ونخرج $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k}$ عاملاً مشتركاً:

$$\Gamma'^p_{lm} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^p} = \left(\Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^m} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^l \partial y^m}\right) \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k}$$

لكن $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^p} \cdot \frac{\partial y^p}{\partial x^k}$ بالتعويض والاختصار على $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y^p}$ نحصل على:



/ /

$$\bar{\Gamma}^{p}_{lm} = \left(\Gamma^{k}_{ij} \frac{\partial x^{i}}{\partial y^{l}} \cdot \frac{\partial x^{j}}{\partial y^{m}} + \frac{\partial^2 x^{k}}{\partial y^{l} \partial y^{m}} \right) \frac{\partial y^{p}}{\partial x^{k}}$$

ولكن نعلم أن علاقة التحويل التنسوري هي:

$$\bar{\Gamma}^{p}_{lm} = \Gamma^{k}_{ij} \frac{\partial x^{i}}{\partial y^{l}} \cdot \frac{\partial x^{j}}{\partial y^{m}} \cdot \frac{\partial y^{p}}{\partial x^{k}}$$

بالمقارنة وملاحظة أن $\frac{\partial^2 x^{k}}{\partial y^{l} \partial y^{m}} \neq 0$ في الحالة العامة نقول أن Γ^{k}_{ij} ليست مركبات لتنسور من النوع $\left(\frac{1}{2}\right)$